Métrique pour la convergence en probabilité

Proposition Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, continue, bornée, croissante, strictement croissante sur un voisinage de 0 et telle que $\psi(0) = 0$.
Alors : $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\psi(|X_n - X|)] = 0$.

Notons M un majorant de ψ sur $\mathbb{R}_+$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = |X_n - X|$.

▷ Supposons que $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de ψ en 0, il existe $\delta > 0$ tel que : $\psi(\delta) \leqslant \varepsilon$.
Posons $\eta := \min(\delta, \varepsilon)$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \psi(Y_n) = \psi(Y_n)\left(\mathbb{1}_{Y_n > \eta} + \mathbb{1}_{Y_n \leqslant \eta}\right)$$
$$\leqslant M\,\mathbb{1}_{Y_n > \eta} + \varepsilon$$

Par passage à l'espérance,

$$0 \leqslant \mathbb{E}[\psi(Y_n)] \leqslant M\,\mathbb{P}(Y_n > \eta) + \varepsilon$$

Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \mathbb{E}[\psi(Y_n)] \leqslant 2\varepsilon$. car $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$
Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[\psi(Y_n)] = 0$$

▷ Réciproquement, supposons que $\mathbb{E}[\psi(Y_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, que l'on peut supposer assez petit, pour que ψ soit strictement croissante sur $[0, 2\varepsilon]$. soit $\varepsilon' > \varepsilon$, on a alors $\mathbb{P}(Y_n > \varepsilon') \leqslant \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon)$
Posons $\eta = \psi(\varepsilon)$, on a alors :

$$\{\psi(Y_n) > \eta\} = \{Y_n > \varepsilon\} \quad \text{par croissance de } \psi$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(Y_n)$ étant positive et bornée, elle est intégrable et on peut appliquer l'inégalité de Markov, on obtient alors :

$$\mathbb{P}(\psi(Y_n) > \eta) \leqslant \frac{1}{\eta}\mathbb{E}[\psi(Y_n)] \quad \text{i.e. } \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}[\psi(Y_n)]}{\eta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Proposition La convergence en probabilité est issue d'une métrique $d : (X, Y) \longrightarrow \mathbb{E}[|X - Y| \wedge 1]$.
De plus, (L^0, d) est un espace métrique complet.

▷ Vérifions que d est une métrique.
La positivité et la symétrie de d sont immédiates.
Soient $X, Y, Z \in L^0$, alors :

$$|X - Z| \leqslant |X - Y| + |Y - Z| \quad \text{donc} \quad |X - Z| \wedge 1 \leqslant |X - Y| \wedge 1 + |Y - Z| \wedge 1$$

On obtient, par croissance de l'espérance, $d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z)$.
De plus, si $d(X, Y) = 0$ alors :

$$|X - Y| \wedge 1 = 0 \text{ p.s} \quad \text{donc} \quad X = Y \text{ p.s.}$$

▷ D'après la proposition précédente, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si et seulement si $d(X_n, X) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

▷ Montrons la complétude de (L^0, d).
Soit $(X_n)_n$ une suite de Cauchy pour d alors en particulier, on peut construire $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une extractrice telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(X_{\varphi(n+1)}, X_{\varphi(n)}) \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Alors, la série de terme général $(\mathbb{E}[|X_{\varphi(n+1)} - X_{\varphi(n)}| \wedge 1])_n$ converge.
On obtient donc :

$$\sum_n (|X_{\varphi(n+1)} - X_{\varphi(n)}| \wedge 1) < +\infty \text{ p.s.}$$

$(X_n)_n$ v.a.R. + $\sum \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty \Rightarrow \sum X_n$ cv p.s.. En effet, par le thm de cv monotone, $\mathbb{E}[\sum |X_n|] = \sum \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$ Donc $\sum |X_n| < +\infty$ presque sûrement.

En particulier, $|X_{\varphi(n+1)} - X_{\varphi(n)}| < 1$ p.s. à partir d'un rang. Alors : $\sum_n |X_{\varphi(n+1)} - X_{\varphi(n)}| < +\infty$.
On en déduit que :

$$\sum_n (X_{\varphi(n+1)} - X_{\varphi(n)}) \text{ converge p.s}$$

Ainsi, $(X_{\varphi(n)})_n$ converge p.s., et donc en probabilité. Alors, $(X_n)_n$ est une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente, donc $(X_n)_n$ converge.